УДК 517.956

Г. П. Лопушанская

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Доказывается разрешимость одной краевой задачи для уравнения второго порядка смешанного типа с разрывными коэффициентами в многомерной цилиндрической области в пространстве распределений. Получено представление решения с помощью вектор-функции Грина.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа рассматривались в различных нормированных функциональных пространствах (обширная библиография приведена, например, в [5]). В настоящей статье, используя методику [1,6—9], изучается одна краевая задача для уравнения второго порядка смешанного типа с разрывными коэффициентами в пространстве распределений Л. Шварца. На рассматриваемом примере показано, как доказать разрешимость краевой задачи в пространстве распределений, если известна ее разрешимость в классе гладких функций.

5 1—3694

Пусть Ω — область в R^n, ограниченная n — 1-мерной замкнутой гиперповерхностью $\partial\Omega$ класса C^∞, внутри Ω расположена замкнутая n — 1-мерная гиперповерхность σ класса C^∞, разбивающая Ω на две области: $\Omega = \Omega_1 \cup \sigma \cup \Omega_2$, $\partial\Omega_1 = \sigma$, $\partial\Omega_2 = \sigma \cup \partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0;\ T)$, $Q_{0r} = \Omega_r \times (0;\ T)$, $Q_{11} = \sigma \times (0;\ T)$, $Q_{12} = \partial\Omega \times (0;\ T)$, $Q_{2r} = \Omega_r$, $r = 1,\ 2$.

В Q рассматривается следующая задача:

$$L^{(r)}u \equiv k^{(r)}(x,\ t)\,u_{tt} + \alpha^{(r)}(x,\ t)\,u_t + A^{(r)}u = F_0^r,\quad (x,\ t) \in Q_{0r}, \tag{1}$$

$$B_1 u \equiv \lambda^{(1)}(x,\ t)\,u^{(1)} - \lambda^{(2)}(x,\ t)\,u^{(2)} = F_{11}^1,$$

$$B_2 u \equiv \frac{\partial u^{(1)}}{\partial N^{(1)}} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial N^{(2)}} = F_{11}^2,\quad (x,\ t) \in Q_{11},$$

$$u^{(2)}(x,\ t) = F_{12},\quad (x,\ t) \in Q_{12},$$

$$u^{(r)}\big|_{t=0} = F_{20}^r,\ u_t^{(r)}\big|_{P_{0r}^-} = F_{21}^r,\ u^{(r)}\big|_{P_{Tr}^+} = F_{22}^r,\quad r = 1,\ 2,$$

где $A^{(r)}u = \sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}^{(r)}(x,\ t)\,u_{x_i})_{x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(r)}(x,\ t)\,u_{x_i} + a^{(r)}(x,\ t)\,u$ — равномерно эллиптический оператор, $r = 1,\ 2$; $\dfrac{\partial}{\partial N^{(r)}} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(r)} n_j \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\vec{n}$ — нормаль к Q_{11} (Q_{12}), внешняя по отношению к Q_{01} (Q); $u = u^{(r)}(x,\ t)$, $(x,\ t) \in Q_{0r}$, коэффициенты уравнений и граничных операторов, а также функции $\lambda^{(r)}(x,$ $t)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми в области их определения; $k^{(r)}(x,\ t)$ меняют знак произвольным образом внутри Q_{0r} (так что операторы $L^{(r)}$ могут быть смешанного типа); P_{0r}^+ $(P_{0r}^-) = \{(x,\ 0),\ x \in \Omega_r : k(x,\ 0) > 0\ (k(x,\ 0) < 0)\}$ и аналогично определяются множества P_{Tr}^+ (P_{Tr}^-).

Введем обозначение $D(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02}) = \{\varphi(x,\ t) = \varphi^{(r)}(x,\ t),\ (x,\ t) \in \bar{Q}_{0r} : \varphi^{(r)}(x,\ t) \in C^\infty(\bar{Q}_{0r})\}$. Для произвольных $u,\ v \in D(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02})$ имеет место формула Грина

$$\sum_{r=1}^{2} \int\limits_{Q_{0r}} (L^{(r)}u^{(r)}v^{(r)} - u^{(r)}L^{*(r)}v^{(r)})\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{11}} \left[\sum_{r=1}^{2} B_r u \hat{C}_r v + u^{(2)}\hat{B}v\right] dsdt + \int\limits_{Q_{12}} \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N^{(2)}} v^{(2)} - u^{(2)}C_2 v^{(2)}\right) dsdt +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2} \int\limits_{Q_{2r}} \{k^{(r)}u_t^{(r)}v^{(r)} + [\alpha^{(r)}v^{(r)} - (k^{(r)}v^{(r)})_t]\,u^{(r)}\}\big|_{t=0}^{t=T}\,dx, \tag{2}$$

где

$$C_r v^{(r)} = \frac{\partial v^{(r)}}{\partial N^{(r)}} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{(r)}(x,\ t)\,n_i v^{(r)},\ r = 1, 2;\quad \hat{B}v = \frac{1}{\lambda^{(1)}}(\lambda^{(1)}C_2 v^{(2)} - \lambda^{(2)}C_1 v^{(1)}),$$

операторы $\hat{C}_r$ имеют такую же структуру, как $C_r : C_1\hat{v} = -(\lambda^{(1)})^{-1}C_1 v^{(1)}$, $\hat{C}_2 v = v^{(2)}$.

Пусть $X(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02}) = \{\psi \in D(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02}) : \hat{B}\psi|_{Q_{11}} = 0,\ \psi^{(2)}|_{Q_{12}} = 0,\ \psi^{(r)}|_{t=T} = 0,\ \psi_t^{(r)}|_{P_{Tr}^-} = 0,\ \psi^{(r)}|_{P_{0r}^+} = 0,\ r = 1, 2\}$, $D(\bar{Q}_{jr}) = C^\infty(Q_{jr})$, $j = \overline{0,\ 2}$, $r = 1, 2$, штрихами обозначаем пространства линейных непрерывных функционалов на соответствующих пространствах функций, $(\varphi,\ F)_j$ — действие распределения $F \in D'(\bar{Q}_{jr})$ на $\varphi \in D(\bar{Q}_{jr})$, $j = \overline{0,\ 2}$, а в случае $j = 0$ также действие $F \in D'(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02})$ $(F \in X'(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02}))$ на $\varphi \in D(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02})$ $(\varphi \in X(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02}))$.

Постановка обобщенной краевой задачи. Пусть $F_0 \in X'(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02})$, $F_{11}^r \in D'(\bar{Q}_{11})$, $F_{12} \in D'(\bar{Q}_{12})$, $F_{2j}^r \in D'(\bar{Q}_{2r})$, $\operatorname{supp} F_{21}^r \subset P_{0r}^-$, $\operatorname{supp} F_{22}^r \subset P_{Tr}^+$, $r = 1,\ 2$, $j = 0,\ 1,\ 2$. Распределение $u \in D'(\bar{Q}_{01},\ \bar{Q}_{02})$ будем называть решением задачи (1), а саму задачу — обобщенной краевой задачей, если для каждой $\psi \in X(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ выполнено

$$(L^*\psi, u)_0 = (\psi, F_0)_0 - \sum_{r=1}^{2} (\hat{C}_r\psi, F_{11}^r)_1 + (C_2\psi^{(2)}, F_{12})_1 +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2} (\alpha^{(r)}(x, 0)\,\psi^{(r)}(x, 0) - (k^{(r)}\psi^{(r)})_t|_{t=0},\ F_{20}^r)_2 +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2} (k^{(r)}(x, 0)\,\psi^{(r)}(x, 0), F_{21}^r)_2 + \sum_{r=1}^{2} (k^{(r)}(x, T)\,\psi_t^{(r)}(x, T), F_{22}^r)_2. \qquad (3)$$

Задача

$$L^{*(r)}\psi = \varphi^{(r)}(x, t),\ (x,\ t) \in Q_{0r},$$

$$\hat{B}\psi|_{Q_{11}} = 0,\ \psi^{(2)}|_{Q_{12}} = 0, \qquad (4)$$

$$\psi^{(r)}\Big|_{\{t=T\}\cup P_{0r}^+} = \psi_t^{(r)}\Big|_{P_{Tr}^-} = 0, \quad r = 1, 2,$$

является сопряженной задаче (1).

В [2—5] рассмотрены отдельные случаи существования и единственности решения задачи вида (1) в некоторых нормированных функциональных пространствах, в том числе в пространствах гладких функций. Отмечено существенное влияние на разрешимость и единственность коэффициентов $\alpha^{(r)}(x, t)$ на множествах тех точек из $\Omega_r^0 = \{(x,\ t) \in D_{0r} : k\,(x,\ t) = 0\}$, которые являются характеристическими или принадлежат $Q_{11} \cup Q_{12}$.

Дальше считаем выполненными следующие предположения.

Предположения. 1. Коэффициенты уравнений и операторов удовлетворяют условиям однозначной разрешимости задачи (4). Дальше через $\overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ будем обозначать пространство таких функций из $D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, что для произвольной $\varphi \in \overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ существует единственное решение задачи (4) $\psi \in \overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ (например, если выполнены условия одной из теорем 6—8 [4] и $k^{(r)}(x,\ 0) \leqslant 0$, то можно взять $\overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) : D_t^p\varphi|_{t=T} = 0,\ p = 0, 1, \ldots\}$).

2. Существует единственное решение задачи (1) для $F_{11}^r = F_{12} = F_{2p}^r = 0$ $(r = 1, 2,\ p = \overline{0, 2})$ и F_0 гладкой из некоторого пространства $\underset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) \subset D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$.

Теорема 1. В предположении 1 решение задачи (1) единственно в пространстве $\overset{0}{D}{}'(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$.

Действительно, если $u_1,\ u_2$ — два ее решения, то для $u = u_1 - u_2$

$$(L^*\psi, u)_0 = 0 \quad \forall\, \psi \in X(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}). \qquad (5)$$

Из предположения следует существование и единственность решения ψ вспомогательной задачи

$$L^*\psi = \varphi,\ \ \psi \in X(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) \qquad (6)$$

для каждой $\varphi \in \overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, а тогда из (5) получаем $(\varphi,\ u)_0 = 0$ для каждой $\varphi \in \overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, т. е. $u = 0$ в $\overset{0}{D}{}'(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$.

Вектор-функцией Грина задачи (1), как известно, называется пара функций $(G_1(x, t;\ y, \tau), G_2(x, t;\ y, \tau)) = G(x, t;\ y,\ \tau)$, определенных для $(y, \tau) \in \bar{Q}_{01} \cup \bar{Q}_{02} = \bar{Q}$, $(x, t) \in \bar{Q}_{01}$ и $(x, t) \in \bar{Q}_{02}$ соответственно и удовлетворяющих задаче

$$L_{(x,t)}^{*(r)} G_r(x, t;\ y, \tau) = \begin{cases} \delta(x - y, t - \tau), & (y, \tau) \in Q_{0r}, \\ 0, & (y, \tau) \bar{\in} Q_{0r}, \end{cases} \qquad (7)$$

$$G_1 = G_2,\ \hat{B}_{(x,t)} G(x, t;\ y, \tau) = 0, \quad (x, t) \in Q_{11},$$

$$G_2 = 0, \quad (x, t) \in Q_{12},$$

$$G_r\big|_{\{t=T\}\cup P_{0r}^+} = 0, \quad \frac{\partial G_r}{\partial t}\bigg|_{P_{Tr}^-} = 0, \quad r = 1, 2.$$

Тогда для каждой $\eta(x, t) \in D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, удовлетворяющей однородным условиям задачи (1) (дальше пространство таких вектор-функций будем обозначать через $Y(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$),

$$(L\eta, G)_0 = (\eta, L^*G)_0 = \eta^{(r)}(y, \tau), \quad (y, \tau) \in Q_{0r}. \tag{8}$$

Рассмотрим δ-образную последовательность $\varphi_n(x, t; y, \tau) \in \overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, $(y, \tau) \in Q \setminus Q_{11}$ (в случае пространства $\overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, определяемого условиями [4], существование таких функций следует из леммы 1 [4]). По определению, $(\eta(x, t), \varphi_n(x, t; y, \tau))_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta^{(r)}(y, \tau)$, $(y, \tau) \in Q_{0r}$, для каждой $\eta \in D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, а значит и для каждой $\eta \in Y(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$. Но в силу предположения 1 существует единственное решение $\psi_n \in X(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) \subset \overset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ задачи (4) для $\varphi = \varphi_n(x, t; y, \tau)$, тогда для каждой $\eta \in D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ $(\eta(x, t), L^*\psi_n(x, t; y, \tau))_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta^{(r)}(y, \tau)$, $(y, \tau) \in Q_{0r}$.

Из формулы Грина (2) следует, что для каждой $\eta \in Y(\bar{Q}_{01}; \bar{Q}_{02})$ $(\eta, L^*\psi_n)_0 = (L\eta, \psi_n)_0$, поэтому, учитывая (8), получаем

$$(L\eta, G - \psi_n)_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta^{(r)}(y, \tau) - \eta^{(r)}(y, \tau) = 0, \; (y, \tau) \in Q_{0r}, \quad r = 1, 2, \tag{9}$$

$\eta(y, \tau) \in \underset{0}{Y}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) = \underset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) \cap Y(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$. Из (9), в силу предположения 2, $(\varphi, G - \psi_n)_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для каждой $\varphi \in \underset{0}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, т. е. $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\overset{0}{D'}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})} G$. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. В предположениях 1 и 2 существует вектор-функция Грина задачи (1) $G(x, t; y, \tau)$, $G(x, t; ., .) \in \underset{0}{D'}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$.

С помощью соображений, аналогичных [6—8], доказываются следующие тождества для вектор-функции Грина и произвольной $\psi \in X(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$:

$$\sum_{r=1}^{2} (L^{*(r)}\psi^{(r)}(x, t), \; G_p(y, \tau; x, t))_0 = \psi^{(p)}(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \bar{Q}_{0p}, \tag{10}$$

$$\sum_{r=1}^{2} (L^{*(r)}\psi^{(r)}(x, t), \; \hat{C}_{p(y,\tau)}G(y, \tau; x, t))_0 = \hat{C}_p\psi(y, \tau), \; (y, \tau) \in Q_{11},$$

$$\sum_{r=1}^{2} (L^{*(r)}\psi^{(r)}(x, t), \; C_{2(y,\tau)}G_2(y, \tau; x, t))_0 = C_2\psi^{(2)}(y, \tau), \quad (y, \tau) \in Q_{12},$$

$$\sum_{r=1}^{2} (L^{*(r)}\psi^{(r)}(x, t), \alpha^{(p)}(y, 0)\, G_p(y, 0; x, t) - (k^{(p)}(y, \tau)\, G_p(y, \tau; x, t))_{\tau|\tau=0})_0 =$$
$$= \alpha^{(p)}(y, 0)\, \psi^{(p)}(y, 0) - (k^{(p)}\psi^{(p)})_{\tau|\tau=0}, \quad y \in Q_{20},$$

$$\sum_{r=1}^{2} (L^{*(r)}\psi^{(r)}(x, t), k^{(p)}(y, s)\, G_p(y, s; x, t))_0 = k^{(p)}(y, s)\, \psi^{(p)}(y, s),$$
$$y \in Q_{20}, \quad s = 0\,(s = T),$$

$$\sum_{r=1}^{2} \left(L^{*(r)}\psi^{(r)}(x, t), k^{(p)}(y, T)\frac{\partial G_p}{\partial \tau}(y, T; x, t)\right)_0 = k^{(p)}(y, T)\, \psi_\tau^{(p)}(y, T), \quad y \in Q_{20}.$$

Теорема 3. В предположениях 1 и 2 существует единственное решение $u(x, t) \in \overset{0}{D'}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ задачи (1), оно определяется формулой

$$(\varphi, u)_0 = ((\varphi(x, t), G(y, \tau; x, t))_0, F_0)_0 -$$
$$- \sum_{p=1}^{2} ((\varphi(x, t), \hat{C}_{p(y,\tau)}G(y, \tau; x, t))_0, F_{11}^p)_1 + \tag{11}$$

$$+ ((\varphi(x, t), C_{2(y,\tau)} G_2(y, \tau;\ x, t))_0, F_{12})_1 +$$
$$+ ((\varphi(x, t), k(y, 0)\, G_\tau(y, 0;\ x, t) - (\alpha(y, 0) - k_\tau(y, 0))\, G(y, 0;\ x, t))_0, F_{20})_2 -$$
$$- ((\varphi(x, t), k(y, 0)\, G(y, 0;\ x, t))_0, F_{21})_2 -$$
$$- ((\varphi(x, t), k(y, T)\, G_\tau(y, T;\ x, t))_0, F_{22})_2,$$
$$\varphi \in \overset{0}{D}(\overline{Q}_{01}, \overline{Q}_{02}).$$

Здесь $/((\varphi(x, t), f(y, \tau;\ x, t))_0, F_j)_j = \sum_{p=1}^{2} \left(\sum_{r=1}^{2} (\varphi^{(r)}(x, t), f_p(y, \tau;\ x, t))_0, F_j^p)_j / . \right)$

Из тождеств (10) для вектор-функции Грина и из однозначной разрешимости вспомогательной задачи (6) для каждой $\varphi \in \overset{0}{D}(\overline{Q}_{01}, \overline{Q}_{02})$ следует, что выражение справа в (11) имеет смысл. Подставляя в (11) $L^* \psi$ вместо φ и учитывая (10), доказываем (3).

1. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 128—131.
2. *Егоров И. Е.* О первой краевой задаче для одного неклассического уравнения // Мат. заметки.— 1987.— 42, № 3.— С. 394—402.
3. *Каратопраклиева М. Г.* К теории уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами. I // Дифференц. уравнения.— 1987.— 23, № 1.— С. 85—102.
4. *Каратопраклиева М. Г.* К теории уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами. II // Там же.— 1988.— 24, № 1.— С. 91—105.
5. *Кузьмин А. Г.* Уравнения второго порядка с эллиптическим оператором по пространственным переменным // Там же.— 1987.— 23, № 1.— С. 102—113.
6. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 6.— С. 795—798.
7. *Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в пространстве обобщенных функций / Львов. ун-т.— Львов, 1986.— 12 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 29.09.86, № 2358—Ук86.
8. *Лопушанская Г. П.* О некоторых свойствах решений нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 11.— С. 1487—1494.
9. *Лопушанская Г. П.* Некоторые свойства решений краевых задач для квазилинейных и линейных уравнений с частными производными смешанного типа в пространствах распределений // Всес. конф. «Нелинейные пробл. дифференц. уравнений и мат. физики», 12—15 сент. 1989 г.: Тез. докл.— Тернополь, 1989.— Ч. 1.— С. 250—251.

Львов. гос. ун-т

Получено 01.11.90